5 LA COURBURE

5.1 Tenseur de Riemann

→ Sur une variété différentielle générique M, $\nexists$ moyen naturel de comparer des vecteurs en $\neq$ points de M. On a donc introduit une structure supplémentaire, la connexion ∇ (caractérisé par les coefficients de connexion $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$). Pour une variété (pseudo-) Riemannienne (M,g), $\exists$ connexion privilégiée : la connexion de Levi-Civita (unique connexion métrique $\nabla_x g_{\mu\nu}=0$ et sans torsion $\Gamma^{\alpha}_{[\mu\nu]}=0$).

→ Le tenseur de Riemann fournit une description locale de la courbure en tout point, en exprimant comment un vecteur est modifié lorsqu'il se déplace le long d'une boucle infinitésimale autour de ce point.

DEF Le crochet de Lie $[\,,\,]$ est défini comme l'application

$$[\,,\,] : \begin{pmatrix} \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X,Y) \longmapsto [X,Y] = XY - YX \end{pmatrix}$$

↳ Composante de $[X,Y]$:

$$\begin{aligned}
[X,Y]f &= X(Y(f)) - Y(X(f)) \\
&= X^{\mu}\partial_{\mu}(Y^{\nu}\partial_{\nu} f) - Y^{\nu}\partial_{\nu}(X^{\mu}\partial_{\mu} f) \\
&= X^{\mu}Y^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} f + X^{\mu}\partial_{\nu} f . \partial_{\mu} Y^{\nu} - Y^{\nu}X^{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu} f - Y^{\nu}\partial_{\mu} f . \partial_{\nu} X^{\mu} \\
&= (X^{\mu}\partial_{\mu} Y^{\alpha} - Y^{\nu}\partial_{\nu} X^{\alpha})\,\partial_{\alpha} f
\end{aligned}$$

↳ $[X,Y]^{\alpha} = X^{\mu}\partial_{\mu} Y^{\alpha} - Y^{\mu}\partial_{\mu} X^{\alpha}$

DEF Le tenseur de Riemann d'une connexion ∇ est l'application

$$R : \begin{pmatrix} \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X,Y,Z) \longmapsto R(X,Y,Z) = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{pmatrix}$$

→ En un point P, $R_P : T_P^*M \times T_PM \times T_PM \times T_PM \to \mathbb{R}$. C'est un tenseur $(1,3)$.

↳ Composantes du tenseur de Riemann dans une carte locale :

$\rightarrow R = R^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho}\, dx^{\mu} \otimes dx^{\nu} \otimes dx^{\rho} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$ (tenseur $(1,3)$)

$\rightarrow R(\partial_\beta, \partial_\gamma, \partial_\delta) = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\, \partial_\alpha$

↳ $R(\partial_\beta, \partial_\gamma, \partial_\delta)(dx^{\mu}) = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\, \partial_\alpha\, dx^{\mu} = R^{\mu}{}_{\beta\gamma\delta}$

$$\rightarrow R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} = \left\{ \nabla_\beta \nabla_\gamma \partial_\alpha - \nabla_\gamma \nabla_\beta \partial_\alpha - \nabla_{[\partial_\beta, \partial_\gamma]} \partial_\alpha \right\} (dx^{\mu})$$

$$= \left\{ \nabla_\beta \left(\Gamma_{\gamma\alpha}^{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\mu}} \right) - \nabla_\gamma \left(\Gamma_{\beta\alpha}^{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\mu}} \right) \right\} dx^{\mu}$$

$$= \left\{ \partial_\beta \Gamma_{\gamma\alpha}^{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\mu}} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\bar{\mu}} \nabla_\beta \partial_{\bar{\mu}} - \partial_\gamma \Gamma_{\beta\alpha}^{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\mu}} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\bar{\mu}} \nabla_\gamma \partial_{\bar{\mu}} \right\} dx^{\mu}$$

$$= \left\{ \partial_\beta \Gamma_{\gamma\alpha}^{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\mu}} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\bar{\mu}} \Gamma_{\beta\bar{\mu}}^{\nu} \partial_\nu - \partial_\gamma \Gamma_{\beta\alpha}^{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\mu}} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\bar{\mu}} \Gamma_{\gamma\bar{\mu}}^{\nu} \partial_\nu \right\} dx^{\mu}$$

$$= \partial_\beta \Gamma_{\gamma\alpha}^{\mu} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\sigma} \Gamma_{\beta\sigma}^{\mu} - \partial_\gamma \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma} \Gamma_{\gamma\sigma}^{\mu}$$

On trouve : $R^{\mu}{}_{\alpha\beta\gamma} = \partial_\beta \Gamma_{\gamma\alpha}^{\mu} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\sigma} \Gamma_{\beta\sigma}^{\mu} - \partial_\gamma \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} - \Gamma_{\beta\alpha}^{\sigma} \Gamma_{\gamma\sigma}^{\mu}$

⊙ Remarques :

① R est un tenseur $(1,3)$

$$R^{\alpha'}{}_{\beta'\gamma'\delta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\beta'}} \cdot \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x^{\gamma'}} \cdot \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x^{\delta'}}\, R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$$

② L'action du tenseur de Riemann sur des champs de vecteur est seulement multiplicative :

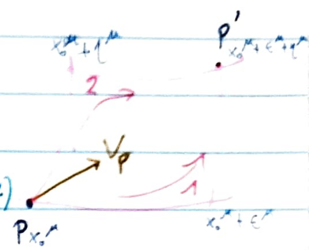
$$R(Z, X, Y) = R^{\alpha}{}_{\mu\nu\rho}\, X^{\nu} Y^{\rho} Z^{\mu}\, \partial_\alpha$$

→ Ne dépend pas des dérivées des composantes des vecteurs. Le tenseur de Riemann est local.

5.2 Interprétation géométrique du tenseur de Riemann

→ En présence de courbure, on s'attend à ce que un vecteur transporté parallèlement d'un point à un autre selon 2 chemins différents donne lieu à 2 vecteurs différents.

→ Déplaçons $\parallel^t$ un vecteur de $P \to P'$ en empruntant 2 chemins différents :



$$\to \tilde V^{\alpha\,(1)}_{x_0^\mu+\epsilon^\mu} = V^\alpha|_{x_0^\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|_{x_0^\mu} V^\beta|_{x_0^\mu}\,\epsilon^\gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Puis $$\tilde{\tilde V}^{\alpha\,(1)}|_{x_0^\mu+\epsilon^\mu+\eta^\mu} = \tilde V^{\alpha\,(1)}_{x_0^\mu+\epsilon^\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|_{x_0^\mu+\epsilon^\mu} V^\beta|_{x_0^\mu+\epsilon^\mu}\,\eta^\gamma + \mathcal{O}(\eta^2)$$

$$= V^\alpha|_0 - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|_0 V^\beta|_0\,\epsilon^\gamma - \left(\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|_0 + \epsilon^\mu\partial_\mu\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|_0\right)\left(V^\beta|_0 - \Gamma^\beta_{\sigma\rho} V^\sigma|_0\,\epsilon^\rho\right)\eta^\gamma$$

$$= V^\alpha|_0 - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|_0 V^\beta|_0\,\epsilon^\gamma - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|_0 V^\beta|_0\,\eta^\gamma + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|_0\Gamma^\beta_{\sigma\rho} V^\sigma|_0\,\epsilon^\rho\eta^\gamma$$
$$- \epsilon^\mu\partial_\mu\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|_0 V^\beta|_0\,\eta^\gamma + \epsilon^\mu\partial_\mu\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|_0\Gamma^\beta_{\sigma\rho} V^\sigma|_0\,\epsilon^\rho\eta^\gamma$$

$$\to \tilde{\tilde V}^{\alpha\,(2)}_{x_0^\mu+\eta^\mu+\epsilon^\mu} = V^\alpha|_0 - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|_0 V^\beta|_0\,\eta^\gamma - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|_0 V^\beta|_0\,\epsilon^\gamma + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_{\sigma\rho} V^\sigma|_0\,\eta^\rho\eta^\gamma$$
$$- \eta^\mu\partial_\mu\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|_0 V^\beta|_0\,\epsilon^\gamma + \eta^\mu\partial_\mu\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|_0\Gamma^\beta_{\sigma\rho} V^\sigma|_0\,\eta^\rho\epsilon^\gamma$$

Comparons les 2 :

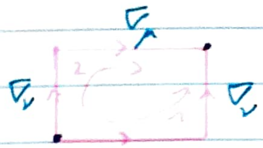
$$\delta V^\alpha \equiv \tilde{\tilde V}^{\alpha\,(1)} - \tilde{\tilde V}^{\alpha\,(2)}$$
$$= \epsilon^\mu V^\beta \eta^\gamma \left[-\partial_\mu\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma}\Gamma^\sigma_{\beta\mu} - \partial_\gamma\Gamma^\alpha_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\gamma}\right]$$

$$\Leftrightarrow \delta V = R^\alpha{}_{\mu\gamma\nu} V^\mu \eta^\gamma \epsilon^\nu$$

→ Le tenseur de Riemann mesure l'écart entre vecteurs lorsque ceux-ci sont déplacés d'un point à un autre (∞t proche) le long de 2 chemins différents.

⊙ Autre expression du tenseur de Riemann :

→ Calculons le commutateur de dérivées covariantes :



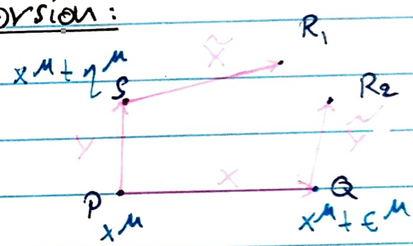
composante d'un tenseur (1,1)

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = \nabla_\mu (\nabla_\nu V^\rho) - \nabla_\nu (\nabla_\mu V^\rho)$$
$$= \partial_\mu (\nabla_\nu V^\rho) - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} (\nabla_\alpha V^\rho) + \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha} (\nabla_\nu V^\alpha) - (\mu \leftrightarrow \nu)$$
$$= \partial_\mu (\partial_\nu V^\rho + \Gamma^{\rho}_{\nu\alpha} V^\alpha) - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} (\partial_\alpha V^\rho + \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} V^\beta)$$
$$+ \Gamma^{\rho}_{\mu\alpha} (\partial_\nu V^\alpha + \Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} V^\beta) - (\mu \leftrightarrow \nu)$$ élimine les termes symétriques en (μ,ν)
$$= V^\alpha (\partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\alpha\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\rho}_{\alpha\mu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\nu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}) = V^\alpha R^{\rho}{}_{\alpha\mu\nu}$$

On trouve :

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = V^\alpha R^{\rho}{}_{\alpha\mu\nu}$$

⊙ Interprétation géométrique de la torsion :



→ Soit les vecteurs $X = \epsilon^\mu \partial_\mu$ et $Y = \eta^\mu \partial_\mu$, tangent à 2 courbes par P.

→ On transporte $//^t$ X le long de PS, et Y le long de PQ :

$$PR_1 = PS + SR_1 = \eta^\mu + \tilde{X}^\mu = \eta^\mu + X^\mu - \Gamma^{\mu}_{\kappa\beta} X^\kappa \eta^\beta$$
$$= \eta^\mu + \epsilon^\mu - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \epsilon^\alpha \eta^\beta$$
$$PR_2 = PQ + QR_2 = \epsilon^\mu + \tilde{Y}^\mu = \epsilon^\mu + \eta^\mu - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \eta^\alpha \epsilon^\beta$$
$$R_2R_1 = PR_1 - PR_2 = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \epsilon^\alpha \eta^\beta + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \eta^\alpha \epsilon^\beta$$
$$= \eta^\alpha \epsilon^\beta \underbrace{(\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\mu}_{\beta\alpha})}_{\hat{=}\ T^{\mu}_{\alpha\beta}}$$ le tenseur de torsion

→ Le tenseur de torsion mesure la non fermeture du parallélogramme constitué par les vecteurs déplacement infinitésimaux et leurs transportés parallèles.

5.3 Propriétés du tenseur de Riemann

Prop (1) $R^{\alpha}{}_{\mu\gamma\nu} = -R^{\alpha}{}_{\mu\nu\gamma}$ (antisymétrie sur les 2 derniers indices).

Preuve: En partant de la définition :

$$R^{\alpha}{}_{\mu\gamma\nu} = \partial_\gamma \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\xi}\Gamma^{\xi}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\nu\xi}\Gamma^{\xi}_{\beta\gamma}$$

$$(\gamma\leftrightarrow\nu) = \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \partial_\gamma \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\xi}\Gamma^{\xi}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\xi}\Gamma^{\xi}_{\beta\nu}$$

$$= -\partial_\gamma \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} + \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\xi}\Gamma^{\xi}_{\beta\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\xi}\Gamma^{\xi}_{\beta\gamma} \qquad \blacksquare$$

Prop (2) $R^{\alpha}{}_{[\beta\gamma\delta]} = 0$. Explicitement :

$$R^{\alpha}{}_{[\beta\gamma\delta]} \equiv \frac{1}{3!}\left\{R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta} + R^{\alpha}{}_{\delta\beta\gamma} - R^{\alpha}{}_{\gamma\beta\delta} - R^{\alpha}{}_{\delta\gamma\beta} - R^{\alpha}{}_{\beta\delta\gamma}\right\}$$

$$= \frac{1}{3!}\left\{2R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + 2R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta} + 2R^{\alpha}{}_{\delta\beta\gamma}\right\} = 0$$

$$\Leftrightarrow R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta} + R^{\alpha}{}_{\delta\beta\gamma} = 0$$

Preuve Plaçons nous dans un RLI (réf. localement inertiel) $\Rightarrow \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\big|_p = 0$

On peut alors calculer ces tenseurs simplifiés :

$$\left.\begin{aligned}
R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} &= \cancel{\partial_\gamma \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}} - \cancel{\partial_\delta \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}} && (1)\\
R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta} &= \cancel{\partial_\delta \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}} - \cancel{\partial_\beta \Gamma^{\alpha}_{\gamma\delta}} && (2)\\
R^{\alpha}{}_{\delta\beta\gamma} &= \cancel{\partial_\beta \Gamma^{\alpha}_{\delta\gamma}} - \cancel{\partial_\gamma \Gamma^{\alpha}_{\delta\beta}} && (3)
\end{aligned}\right\}\ (1)+(2)+(3) = 0 \qquad \blacksquare$$

Prop (3a) $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$

(3b) $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}$

Preuve: Plaçons nous dans un SCLI et développons :

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\rho} R^{\rho}{}_{\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\rho}\left(\partial_\gamma \Gamma^{\rho}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^{\rho}_{\beta\gamma}\right)$$

$$= \frac{1}{2} g_{\alpha\rho}\left\{\partial_\gamma\left[g^{\epsilon\rho}(\partial_\beta g_{\epsilon\delta} + \partial_\delta g_{\epsilon\beta} - \partial_\epsilon g_{\beta\delta})\right] - \partial_\delta\left[g^{\epsilon\rho}(\partial_\beta g_{\epsilon\gamma} + \partial_\gamma g_{\epsilon\beta} - \partial_\epsilon g_{\beta\gamma})\right]\right\}$$

$g_{\alpha\rho}\, g^{\epsilon\rho} = \delta^{\epsilon}_{\alpha}$

Or, $\partial_\gamma g^{\epsilon\rho} = 0$ (SCLI) et $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$

$$= \frac{1}{2}\left\{\delta^{\epsilon}_{\alpha}(\partial_\gamma\partial_\beta g_{\epsilon\delta} + \partial_\gamma\partial_\delta g_{\epsilon\beta} - \partial_\gamma\partial_\epsilon g_{\beta\delta}) - \delta^{\epsilon}_{\alpha}(\partial_\delta\partial_\beta g_{\epsilon\gamma} + \partial_\delta\partial_\gamma g_{\epsilon\beta} - \partial_\delta\partial_\epsilon g_{\beta\gamma})\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\partial_\gamma\partial_\beta g_{\alpha\delta} - \partial_\gamma\partial_\alpha g_{\beta\delta} + \partial_\alpha\partial_\delta g_{\beta\gamma} - \partial_\delta\partial_\beta g_{\alpha\gamma}\right\}$$

On a donc $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\{ \partial_\gamma\partial_\beta g_{\alpha\delta} + \partial_\delta\partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \partial_\gamma\partial_\alpha g_{\beta\delta} - \partial_\delta\partial_\beta g_{\alpha\gamma} \}$

Ainsi, si on effectue $(\alpha \leftrightarrow \gamma)$ et $(\beta \leftrightarrow \delta)$, rien ne change.

Si on effectue $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, on prend un signe

Prop (4) $\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0$ C'est l'identité de Bianchi.

Explicitement; $\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0$

ou encore $R^\alpha{}_{\beta[\gamma\delta;\epsilon]} = 0$

Preuve On se place dans un SCLI. La dérivée covariante devient alors partielle.

→ $\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\lambda \left[\partial_\sigma\partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\mu\partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\rho\partial_\nu g_{\sigma\mu} \right]$

→ $\nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\rho \left[\partial_\lambda\partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\mu\partial_\sigma g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda\partial_\nu g_{\sigma\mu} + \partial_\sigma\partial_\nu g_{\lambda\mu} \right]$

→ $\nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\sigma \left[\partial_\rho\partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\mu\partial_\lambda g_{\rho\nu} - \partial_\rho\partial_\nu g_{\lambda\mu} + \partial_\lambda\partial_\nu g_{\rho\mu} \right]$

⊙ Nombre de composantes indépendantes du Riemann à (3+1)-D.

→ A priori, il y a $4^4 = 256$ composantes. Néanmoins, toutes ces composantes ne sont pas indépendantes.

→ La prop (3a) implique qu'on peut voir $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ comme une matrice symétrique R_{AB} avec $A = (\alpha\beta)$ et $B(\gamma\delta)$. On a bien $R_{AB} = R_{BA}$

→ A et B sont contraint par (1) et (3b) :
$A, B \in \{(01), (02), (03), (12), (13), (23)\}$. On a alors $n(n+1)/2 = 6.7/2 = 21$ composantes indépendantes.

→ Il reste (2): $R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} = 0$. Mais certains de ces conditions sont redondantes. En effet,

↳ si $\beta = \gamma$: $R_{\alpha\beta\beta\delta} + R_{\alpha\beta\delta\beta} + R_{\alpha\delta\beta\beta} = -R_{\alpha\beta\delta\beta} + R_{\alpha\beta\delta\beta}$ tjs vrai!

↳ si $\alpha = \beta$: $R_{\alpha\alpha\gamma\delta} + R_{\alpha\gamma\delta\alpha} + R_{\alpha\delta\alpha\gamma} = -R_{\alpha\gamma\alpha\delta} + R_{\alpha\delta\alpha\gamma}$
$= -R_{\alpha\delta\alpha\gamma} + R_{\alpha\delta\alpha\gamma}$ tjr vrai!

Seule condition, si tout les indices sont différents!

ex: $R_{0123} + R_{0231} + R_{0312} = 0$

Prop Le tenseur de Riemann a 20 composantes indépendantes. (si dimension = 4).

⊙ Tenseur de Riemann en est plat :

Prop Si $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, alors $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = 0$

5.4 D'autres tenseurs

→ A partir du tenseur de Riemann, il est possible de construire d'autres tenseurs utiles.

DEF On définit le tenseur de Ricci selon

$$R_{\alpha\beta} \hat{=} R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} = g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\beta}$$

Prop Le tenseur de Ricci est symétrique : $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$

preuve $R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\beta} = g^{\mu\nu} R_{\mu\beta\nu\alpha} = R^{\nu}{}_{\beta\nu\alpha} = R_{\beta\alpha}$ ∎

DEF On définit la courbure scalaire selon :

$$R = R^{\alpha}{}_{\alpha}$$ trace du tenseur de Ricci

DEF On définit le tenseur d'Einstein selon :

$$G_{\alpha\beta} \hat{=} R_{\alpha\beta} - \frac{R}{2} g_{\alpha\beta}$$

Ou encore :

$$G^{\alpha}{}_{\beta} = R^{\alpha}{}_{\beta} - \frac{R}{2} \delta^{\alpha}{}_{\beta}$$

⊙ Propriétés du tenseur d'Einstein :

Prop Il est symétrique : $G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$

Prop : $\nabla_\beta G^{\alpha\beta} = 0$ Il est de divergence nulle (comme $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$).

Preuve Partons de l'identité de Bianchi :

$$\nabla_\lambda R_{\alpha\beta\gamma\delta} + \nabla_\alpha R_{\beta\lambda\gamma\delta} + \nabla_\beta R_{\lambda\alpha\gamma\delta} = 0 \quad \| g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}$$

$$\Leftrightarrow \nabla_\lambda (R^{\gamma\delta}{}_{\gamma\delta}) + \nabla_\alpha (g^{\alpha\gamma} R^{\delta}{}_{\lambda\gamma\delta}) + \nabla_\beta (g^{\beta\delta} R^{\alpha}{}_{\alpha\gamma\delta}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla_\lambda R - \nabla_\alpha g^{\alpha\gamma} R_{\lambda\gamma} - \nabla_\beta g^{\beta\delta} R_{\lambda\delta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla_\lambda R - 2 \nabla^{\gamma} R_{\gamma\lambda} = 0 \quad \Leftrightarrow \nabla_\gamma \left(R^{\gamma}{}_{\lambda} - \frac{R}{2} \delta^{\gamma}_{\lambda}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla_\gamma G^{\gamma}{}_{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \nabla_\gamma G^{\gamma\lambda} = 0$$ ∎

5.5 Les géodésiques

→ Les géodésiques sont les généralisations des lignes droites de l'espace-temps plat à un espace courbe de métrique $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$

DEF (1) Les géodésiques sont des courbes dont le vecteur tangent est transporté parallèlement à lui-même : $\nabla_u u = 0$
(2) Les géodésiques sont des courbes qui extrémisent la distance / le temps propre.

→ Les géodésiques décrivent les trajectoires de particules libres dans un espace-temps courbe (en présence de gravitation).

→ Soit une courbe $x^\mu(\lambda)$ de vecteur tangent $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$

On prend comme paramètre le long de la courbe le temps propre τ ($d\tau^2 = -ds^2 = -g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$)

↳ Rappel: le champ de vecteur u est transporté $//^t$ à lui même

$\Leftrightarrow \nabla_u u = 0 \Leftrightarrow \nabla_u(u^\alpha \partial_\alpha) = 0 \Leftrightarrow u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = 0$

$\Leftrightarrow u^\alpha (\partial_\alpha u^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\mu} u^\mu) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{dx^\alpha}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\beta}{d\tau} + \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} = 0$$

DEF On appelle l'équation des géodésiques

$$\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma^\beta_{\alpha\nu}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

→ Si on est dans un e-t plat dans un ref inertiel, on a $\Gamma^\beta_{\alpha\nu} = 0$ et

$$\frac{d^2x^\beta}{d\tau^2} = 0 \quad \leftarrow \text{droite Minkowskienne}$$

→ L'équation des géodésique représente aussi une trajectoire libre dans un RLI, dans un e-t courbe.

↳ Dans un référentiel quelconque,

$$\frac{dx^{\hat\alpha}}{d\tau} = \frac{dx^\kappa}{d\tau}\cdot\frac{dx^{\hat\alpha}}{dx^\kappa} \rightsquigarrow \frac{d^2x^{\hat\alpha}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^\kappa}{d\tau}\cdot\frac{dx^{\hat\alpha}}{dx^\kappa}\right) = 0$$

$$\frac{d^2x^{\hat\alpha}}{d\tau} = \frac{d^2x^\kappa}{d\tau^2}\cdot\frac{dx^{\hat\alpha}}{dx^\kappa} + \frac{dx^\kappa}{d\tau}\cdot\frac{d}{d\tau}\cdot\frac{dx^{\hat\alpha}}{dx^\kappa} \qquad = \frac{dx^\beta}{d\tau}\cdot\frac{\partial}{\partial x^\beta}\cdot\frac{dx^{\hat\alpha}}{dx^\kappa}$$

$$= \frac{d^2x^\kappa}{d\tau^2}\cdot\frac{dx^{\hat\alpha}}{dx^\kappa} + \frac{\partial^2 x^{\hat\alpha}}{\partial x^\beta\partial x^\kappa}\cdot\frac{dx^\kappa}{d\tau}\cdot\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \qquad \Big\Vert \times \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\hat\alpha}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\hat\alpha}}\cdot\frac{\partial^2 x^{\hat\alpha}}{\partial x^\kappa\partial x^\beta}\frac{dx^\kappa}{d\tau}\cdot\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x^\gamma}{d\tau^2} + \Gamma^\gamma_{\beta\alpha}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\cdot\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

→ Les Γ capturent les forces fictives d'inertie, donc la gravitation, de laquelle elles sont indistinguables (principe d'équivalence).

DEMO: → Montrons que $\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\hat\alpha}}\cdot\frac{\partial^2 x^{\hat\alpha}}{\partial x^\kappa\partial x^\beta} = \Gamma^\gamma_{\kappa\beta}$ en 2 étapes :

1) Soit $x^{\hat\alpha}$ un autre système de CLI. Alors $\Gamma^{\hat\gamma}_{\hat\alpha\hat\beta}=0$ (car $\partial g = 0$).
On alors $x^{\hat\alpha} = \Lambda^{\hat\alpha}_\mu x^\mu + a^{\hat\alpha} \to \frac{\partial^2 x^{\hat\alpha}}{\partial x^\beta\partial x^\alpha} = 0$ comme Γ

2) Comment se transforme le RHS et LHS sous changement de ref quelconque ?

$$\to \Gamma^{\gamma'}_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{\beta'}} \qquad \text{(RHS)}$$

$$\to \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma}\cdot\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\hat\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(\frac{\partial x^{\hat\alpha}}{\partial x^\beta}\cdot\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}\right) \qquad \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}\cdot\frac{\partial^2 x^{\hat\alpha}}{\partial x^\alpha\partial x^\beta} = \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma}\cdot\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\hat\alpha}}\left[\frac{\partial x^{\hat\alpha}}{\partial x^\beta}\cdot\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{\beta'}} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}\cdot\frac{\partial^2 x^{\hat\alpha}}{\partial x^{\alpha'}\partial x^\beta}\right]$$

$$= \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}\cdot\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} + \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\gamma}\cdot\underbrace{\frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\hat\alpha}}\cdot\frac{\partial x^{\hat\alpha}}{\partial x^\beta}}_{\delta^\gamma_\beta}\cdot\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{\beta'}}$$

$$= \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\cdot\partial_\gamma x^{\gamma'}\,\partial_{\beta'}x^\beta\,\partial_{\alpha'}x^\alpha + \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\beta}\cdot\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x^{\alpha'}\partial x^{\beta'}}$$

⊙ Remarque :

→ L'équation des géodésiques est non-invariante sous changement de paramétrisation. Regardons comment se transforme $\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0$ sous $\tau \mapsto \lambda(\tau)$.

↳ $\frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{d\tau}{d\lambda}\cdot\frac{dx^\alpha}{d\tau}$, $\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} = \frac{d^2\tau}{d\lambda^2}\cdot\frac{dx^\alpha}{d\tau} + \left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}$

↳ $\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} = \frac{d^2\tau}{d\lambda^2}\cdot\frac{dx^\alpha}{d\tau} - \left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau}$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2}+\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \underbrace{\boxed{\frac{d^2\tau}{d\lambda^2}\cdot\frac{d\lambda}{d\tau}}}_{f(\lambda)}\cdot\frac{dx^\alpha}{d\lambda}$$

Pour annuler le membre de droite, il faut : $\begin{cases}\tau = a\lambda+b\\ \lambda=\tilde{a}\tau+\tilde{b}\end{cases}$

↳ paramétrisation affine !

5.6 Propriétés des géodésiques

Prop : Soit $x^\alpha(\lambda)$ une géodésique satisfaisant $\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0$ et $u = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ son vecteur tangent. Alors :

$$\frac{d}{d\lambda}\|u^\alpha\|^2=0 \text{ le long de la géodésique.}$$

Preuve : On a : $\|u\|^2 = g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$. En dérivant, on obtient :

$$\to \frac{d}{d\lambda}\|u\|^2 = \left(\frac{d}{d\lambda}g_{\alpha\beta}\right)\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} + 2g_{\alpha\beta}\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2}\frac{dx^\beta}{d\lambda}$$

$$= \frac{dx^\mu}{d\lambda}\partial_\mu g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} - 2g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}$$

$$= \partial_\mu g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda} - \frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}g_{\alpha\beta}\cdot g^{\alpha\theta}\left(\partial_\mu g_{\theta\nu}+\partial_\nu g_{\mu\theta}-\partial_\theta g_{\mu\nu}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{dx^\beta}{d\lambda}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}_{\text{symétrique en }(\beta,\nu)}\left(\partial_\mu g_{\nu\beta} - \partial_\mu g_{\beta\nu} + \underbrace{\partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}}_{\text{antisymétrique en }(\beta,\nu)}\right) = 0 \qquad \blacksquare$$

Corro : Si une géodésique est de genre (temps, lumière, espace) en un point, elle l'est en tout point.
De plus, si λ est un paramètre affin, $\|u^\alpha\|^2$ est une constante du mouvement.

5.7 Géodésiques et principe variationnel

→ Les géodésiques correspondent à des courbes extrémales.

Prop : Soit (M, g, ∇_{LC}) un espace lorentzien muni d'une connexion de Levi-Civita. Soit $x^\mu(\lambda)$ une courbe de genre temps. Le temps propre le long de la courbe est

$$\tau = \int d\tau = \int -ds = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda$$

Soit les points $P = x^\mu(\lambda_1)$ et $Q = x^\mu(\lambda_2)$. On veut montrer que

$$\delta\tau = 0 \iff \frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \cdot \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0$$

DEMO : On pose $f = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \rightsquigarrow \delta\tau = \int \delta\sqrt{-f}\, d\lambda = \int -\frac{1}{2} (-f)^{-1/2} \delta f \, d\lambda$

On choisit de paramétriser par le temps propre ; alors $f = \frac{ds^2}{d\tau^2} = u^2 = -1$

↳ $\delta\tau = -\frac{1}{2} \int \delta f \, d\tau$

↳ Conséquence : $I \equiv \frac{1}{2} \int f \, d\tau$ a les mêmes points stationnaires que $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-g_{\mu\nu}\, dx^\mu/d\lambda \; dx^\nu/d\lambda}\, d\lambda$

→ On définit alors le lagrangien suivant : $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ et on le fait varier sous $x^\mu \mapsto x^\mu + \delta x^\mu$, $g_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \partial_\alpha g_{\mu\nu} \cdot \delta x^\alpha$.

En utilisant Euler-Lagrange, on a :

$$\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\delta^\alpha_\mu \dot{x}^\beta + \dot{x}^\alpha \delta^\beta_\mu) = g_{\mu\beta} \dot{x}^\beta$$

$(\dot{L_{\dot{x}}}) - L_x = 0$

$$\hookrightarrow \frac{d}{d\tau} g_{\mu\beta} \cdot \dot{x}^\beta + g_{\mu\beta} \ddot{x}^\beta - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$$

$$\iff \partial_\alpha g_{\mu\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + g_{\mu\beta} \ddot{x}^\beta - \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$$

$$\iff g_{\mu\beta} \ddot{x}^\beta + \frac{1}{2} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta (\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}) = 0 \quad \| g^{\mu\gamma}$$

$$\iff \ddot{x}^\gamma + \frac{1}{2} g^{\mu\gamma} (\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \partial_\mu g_{\alpha\beta}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$$

→ Les courbes qui extrémisent le temps propre sont les géodésiques. (si $\nabla = \nabla_{LC}$)

5.8 Observateurs localement inertiels 2.0

→ Soit P un point de l'espace-temps (M, g). On peut tjs trouver un système de coordonnées $x^{\hat{\mu}}$ tel que $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}|_P = 0$ et $\partial_{\hat{\kappa}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}|_P = 0$

→ En fait, les particules libres en présence de gravitation (qui suivent des géodésiques de genre temps) correspondent à des observateurs en chute libre (observateurs localement inertiels).

Thm : Soit une géodésique de genre temps. Il existe au moins un système de coordonnées $\{x^{\hat{\mu}}\} = \{x^0, x^k\}$ tel que

① la géodésique a pour équation $x^k = 0$

② le temps propre le long de la géodésique est donné par x^0

③ $g_{\alpha\beta}(x^0; 0) = \eta_{\alpha\beta}$

④ $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x^0; 0) = 0$

DEMO : ① Soit $y^{\mu}(\tau)$ une géodésique d'équation $y^{\mu} = y^{\mu}(\tau)$. On a :

$$\begin{cases} y^0 = y^0(\tau) \rightsquigarrow \tau = \tau(y^0) \\ y^k = y^k(\tau) \rightsquigarrow y^k = y^k(y^0) \end{cases}$$

→ On introduit de nouvelles coordonnées : $\begin{cases} \bar{x}^k \equiv y^k - y^k(y^0) \\ \bar{x}^0 \equiv y^0 \end{cases}$

Dans ces nouvelles coord., la géodésique a pour équation : $\bar{x}^0 = y^0$; $\bar{x}^k = 0$

→ Voir notes pour les autres démos.

→ On peut annuler les Γ le long d'une géodésique de genre temps tout entière.

5.9 Géodésiques et limite newtonienne

→ Il faut retrouver la limite newtonienne à partir de l'équation des géodésiques.

→ Gravitation newtonienne :

$$\bar{F} = m\bar{a} = m\bar{g} = m \cdot -\frac{GM}{r^2}\vec{1}_r = m\bar{\nabla}\Phi \quad \text{avec } \Phi = -GM/r$$

$$\Rightarrow \bar{a} = -\bar{\nabla}\Phi \quad \text{ou encore} \quad \frac{d^2x^i}{dt^2} = -\partial^i\Phi$$

⊙ Limite Newtonienne :

① Les particules se déplacent à faible vitesse devant c :

$$\frac{dx^i}{dt} \ll 1$$

② Le champ gravitationnel est faible : $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$

③ Le champ gravitationnel est statique : $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \partial_0 g_{\mu\nu} = 0$

⊙ Cas limite de l'équation des géodésiques : $\left(\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\right)$

→ Puisque $\frac{dx^i}{dx^0} \ll 1$, $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau} \rightarrow \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2$

Or, $\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha}\left(\cancel{\partial_0 g_{0\alpha}} + \cancel{\partial_0 g_{\alpha 0}} - \partial_\alpha g_{00}\right)$

$$= -\frac{1}{2} g^{\mu\alpha}\partial_\alpha g_{00}$$

$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ car $g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta + o(h^2)$

$\Leftrightarrow (\eta^{\alpha\mu} - h^{\alpha\mu})(\eta_{\mu\beta} + h_{\mu\beta}) = \delta^\alpha_\beta + o(h^2)$

$$= -\frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha} - h^{\mu\alpha})\partial_\alpha h_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\partial_\alpha h_{00}$$

L'équation devient : $\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}\partial_\alpha h_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0$

→ $\underline{\mu = 0}$: $\frac{d^2x^0}{d\tau^2} = \frac{+1}{2}\eta^{0\alpha}\partial_\alpha h_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{dx^0}{d\tau} = cste$

→ $\underline{\mu = i}$: $\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\partial^i h_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2$ $\quad (\eta^{ii} = 1)$

car $\frac{d}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{d}{dx^\mu} \sim \frac{dx^0}{d\tau}\cdot\frac{d}{dx^0}$

Or, $\frac{d^2x^i}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\cdot\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{dx^0}{d\tau}\cdot\frac{d}{dx^0}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\cdot\frac{dx^i}{dx^0}\right) = \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2\frac{d^2x^i}{dx^{0\,2}}$

Ainsi, $\frac{d^2x^i}{dx^{0\,2}} = \frac{1}{2}\partial^i h_{00} \Leftrightarrow \frac{1}{c^2}\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\partial^i h_{00} \overset{!}{=} -\frac{1}{c^2}\partial^i\Phi$

On identifie : $\Phi = -\frac{c^2}{2}h_{00} \Leftrightarrow h_{00} = -\frac{2}{c^2}\Phi \Leftrightarrow g_{00} = -\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$

Red shift gravitationnel :

→ On avait trouvé qu'un photon se propageant dans un champ de gravitation était décalé vers le rouge lorsqu'il s'élevait dans celui-ci :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} = \frac{g z}{c^2} = \frac{\Delta\Phi}{c^2}$$

→ Notons $z_{E/R}$ la hauteur d'émission, de réception du photon. Alors

$(d\tau^2 = -ds^2 = -g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu)$

$d\tau_E^2 = -g_{00}(z_E)\, dt_E^2$ et $d\tau_R^2 = -g_{00}(z_R)\, dt_R^2$ (car $dx^i = 0$ pour les obs. fixes dans le champ de grav.)

Or, $dt_E = dt_R$ (champ grav. statique), donc :

$$\frac{T_E}{T_R} = \frac{\lambda_E}{\lambda_R} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{d\tau_E}{d\tau_R} = \sqrt{\frac{g_{00}(z_E)}{g_{00}(z_R)}} = \sqrt{\frac{(1+2\Phi(z_E))/c^2}{(1+2\Phi(z_R))/c^2}}$$

$$\simeq \sqrt{1 + 2(\phi_E - \phi_R)/c^2} \simeq 1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2}$$

Ainsi :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\Delta\Phi}{c^2}$$ On retrouve le résultat !

5.10 Dérivation des géodésiques et tenseur de Riemann

→ Pour détecter la présence d'un champ de gravitation, il faut étudier comment des géodésiques voisines se comportent l'une p/r à l'autre.

Mécanique Newtonienne :

→ Une particule se déplaçant sous l'influence d'un champ de gravitation :

$$d^2x^i/dt^2 = -\partial^i \Phi(x)$$

→ 2 particules, en $x^i(t)$ et en $x^i(t) + \delta x^i(t)$. La 2e particule obéit à :

$$\frac{d^2}{dt^2}(x^i + \delta x^i) = -\partial^i \Phi(x+\delta x) \simeq -\partial^i\Phi(x) - \partial_j(\partial^i\Phi)(x).\, \delta x^j + \mathcal{O}(\delta x^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2}\delta x^i = -\partial_j \partial^i \Phi(x)\, \delta x^j$$

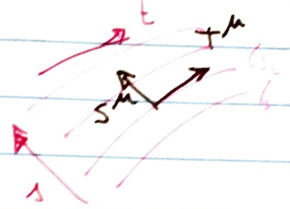
DEF L'équation des forces de marée gravitationnelles est donnée par

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta x^i = -\delta x^j\, \partial_j \partial^i \Phi(x)$$

⊙ Relativité Générale :

→ Considérons une famille à un paramètre de géodésiques $\gamma_s(t)$, de paramètre affine t. Soit le champ de vecteur tangent

$$T = T^\mu \partial_\mu \quad \text{avec} \quad T^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu(\gamma_s(t))}{\partial t}\Big|_{s \text{ fixé}}$$



→ Par définition d'une géodésique, T est transporté $//^t$ à lui-même : $\nabla_T T = T^\mu \nabla_\mu T = 0$

→ On définit le champ de vecteur S tel que $S^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}(\gamma_s(t))\Big|_{t \text{ fixé}}$

S représente le déplacement d'une géodésique à une autre infinitésimalement voisine (équivalent de δx^i).

→ On définit la vitesse relative entre 2 géodésiques :

$$V^\mu \equiv (\nabla_T S)^\mu = T^\nu \nabla_\nu S^\mu \equiv \frac{D}{dt} S^\mu$$

et l'accélération relative :

$$A^\mu \equiv (\nabla_T V)^\mu = T^\nu \nabla_\nu V^\mu \equiv \frac{D^2}{dt^2} S^\mu$$

→ On veut calculer A^μ :

① $\gamma_s(t)$ définit une surface bidimentionnelle sur M. Les champs S^μ et T^μ définissent localement une base de coordonnée associée aux coord (s, t) :

$$T = \partial/\partial t \quad \text{et} \quad S = \partial/\partial s$$

→ Leur commutateur est nul (on peut poser $T = (1, 0, \dots, 0)$ et $S = (0, 1, 0, \dots, 0)$)

On a alors $[S, T]^\nu = S^\mu \partial_\mu T^\nu - T^\mu \partial_\mu S^\nu = 0$

→ Puisque le commutateur de 2 vecteurs est un vecteur, cette relation peut se généraliser : $S^\mu \nabla_\mu T^\nu - T^\mu \nabla_\mu S^\nu = 0$

② On peut maintenant calculer :

$$A^\mu = T^\alpha \nabla_\alpha (T^\nu \nabla_\nu S^\mu) = T^\alpha \nabla_\alpha (S^\nu \nabla_\nu T^\mu)$$

$$= T^\alpha \nabla_\alpha S^\nu . \nabla_\nu T^\mu + T^\alpha S^\nu \nabla_\alpha \nabla_\nu T^\mu \qquad \text{Or, } [\nabla_\mu, \nabla_\nu] T^\alpha = R^\alpha_{\ \beta\mu\nu} T^\beta$$

$$= S^\alpha \nabla_\alpha T^\nu . \nabla_\nu T^\mu + T^\alpha S^\nu (R^\mu_{\ \rho\alpha\nu} T^\rho + \nabla_\nu \nabla_\alpha T^\mu)$$

Or, $T^\alpha S^\nu \nabla_\nu \nabla_\alpha T^\mu = S^\nu \nabla_\nu (T^\alpha \nabla_\alpha T^\mu) - S^\nu \nabla_\nu T^\alpha . \nabla_\alpha T^\mu$

$$= T^\alpha S^\nu R^\mu_{\ \rho\alpha\nu} T^\rho = A^\mu$$

DEF On trouve l'équation de déviation géodésique

$$A^\mu \equiv \frac{D^2}{dt^2} S^\mu = R^\mu_{\ \alpha\rho\sigma} T^\alpha T^\rho S^\sigma$$